Сферическая однородная оболочка конечной толщины.

Пусть есть статическая однородная оболочка конечной толщины и вещество распределено в области $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$.

Метрику всюду ищем в "стандартной" форме, чтобы угловая функция была одинакова в трех метриках: $-r^2$. При этом у нас автоматом угловые метрические компоненты на внутренней и внешней границы сшиваются гладко. Значит, имеем такой вид метрики в трех областях ($c = 1$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2 \quad , \qquad r > b \qquad (1)$$

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \qquad , \qquad a < r < b \qquad (2)$$

$$ds^2 = A dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 \qquad , \qquad r < a \,, \quad A = const \qquad (3)$$

Внешнее выражение это стандартная метрика Шварцшильда. Почему плоское пространство внутри имеет такой вид (3) будет понятно из дальнейших рассуждений. Будем сначала искать решение (2) внутри вещества. Для этого выпишем уравнения Гильберта-Эйнштейна.

$$G_0^0 = e^{-\lambda}(\lambda' r + e^{\lambda} - 1) = 8\pi G T_0^0 \qquad (4)$$

$$G_1^1 = e^{-\lambda}(\nu' r - e^{\lambda} + 1) = 8\pi G T_1^1 \qquad (5)$$

$$G_3^3 = G_4^4 = \frac{e^{-\lambda}\left(\left(2\nu'' + {\nu'}^2 - \lambda'\nu'\right) r + 2\nu' - 2\lambda'\right)}{4r} = 8\pi G T_3^3 = 8\pi G T_4^4 \qquad (6)$$

Уравнение (4) решается точно. Обозначая нулевую компоненту ТЭИ через плотность $\boldsymbol{\varepsilon}$, получим решение:

$$e^{\lambda} = \frac{1}{-\frac{8\pi G \varepsilon r^2}{3} - \frac{C}{r} + 1} \qquad (7)$$

Постоянную C находим из сшивки радиальных компонент внутри оболочки с метрикой Шварцшильда на внешней границе: $e^{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{b}}$ и таким образом, внутри оболочки, где вещество:

$$e^{\lambda} = \frac{r}{\frac{8\pi G \varepsilon (b^3 - r^2)}{3} - r_g + r} \qquad (8)$$

В дальнейшем нам понадобится очень важное рассуждение ЛЛ-2 из пар. 100. Когда они сшивают радиальную компоненту на границе, то считают, что в данных «стандартных» координатах $\lambda = 0$ при $r = 0$, чтобы в центре отсутствовала сингулярность, причем, не накладывается никаких специальных условий на ТЭИ, кроме сферической симметрии. Значит, радиальная компонента под оболочкой автоматом получается $g_{rr} = -1$.

Отсюда корректная сшивка на внутренней границе $r = a$ дает еще одно важное соотношение для введенной плотности вещества, а именно:

$$\frac{8\pi G \varepsilon (b^3 - a^2)}{3} = r_g, \quad \text{или} \qquad 8\pi G \varepsilon = \frac{3 r_g}{b^3 - a^3} \,, r_g = 2MG \qquad (9)$$

То есть инвариантная плотность получилась, как отношение полной массы M к объему в евклидовом пространстве. Далее делаем еще одно допущение: поскольку оболочка статическая, то давление на внутренней и внешней границы ноль и можно предположить, что $T_1^1 = 0$ равно нулю для тонкой оболочки. Тогда уравнение (5):

$$e^{-\lambda}(\nu' r - e^{\lambda} + 1) = 0$$

даёт решение для ν в общем виде:

$$\nu = -\int_r^{\infty} \frac{e^{\lambda}-1}{r} dr \qquad \textit{(10)}$$

Где

$$e^{\lambda} = \begin{cases} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, & r > b \qquad (11a) \\ \frac{r}{\frac{8\pi G\varepsilon(b^3 - r^2)}{3} - r_g + r}, & a < r < b \qquad (11b) \\ 1, & a < r \qquad (11c) \end{cases}$$

Таким образом, согласно (10) мы получаем нулевую метрическую компоненту всюду непрерывную и даже гладкую. Радиальная компонента на границах только непрерывна. В некоторых статьях теоретики допускают такое решение, когда есть разрыв первых производных на границе по координате, от которой зависят компоненты. Распишем интеграл (10):

$$\nu(r) = -\int_a^b \frac{e^{\lambda}}{r} dr + \int_a^b \frac{1}{r} dr + \int_b^{\infty} \frac{e^{\lambda}-1}{r} dr$$

Или, замечая, что $-\int_b^{\infty} \frac{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}-1}{r} dr = \ln\left(1 - \frac{r_g}{b}\right)$:

$$\nu(r) = -\int_r^b \frac{dr}{\frac{b^3 - r^3}{b^3 - a^3} r_g - r_g + r} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(1 - \frac{r_g}{b}\right) \qquad (12)$$

Таким образом найдена радиальная компонента внутри вещества. Теперь осталось найти постоянную $A = e^{\nu(a)}$, вычисляя нулевую компоненту на внутренней границы $r = a$.

$$\nu(a) = -\int_a^b \frac{dr}{\frac{b^3 - r^3}{b^3 - a^3} r_g - r_g + r} + ln\left(\frac{b}{a}\right) + ln\left(1 - \frac{r_g}{b}\right) \qquad (13)$$

Теперь решение во всех трех областях с указанными допущениями найдено полностью в общем виде (1-3), (11a)-(11c), (12) , (13), оно непрерывно для всех метрических компонент, и гладко, кроме радиальной. Интеграл (12) не находится явно.

Частные случаи:

Рассмотрим тонкую оболочку $a \approx b,\ b - a = h << b$

$$\nu(a) = -\int_a^b \frac{dr}{\frac{b^3 - r^3}{b^3 - a^3} r_g - r_g + r} + ln\left(1 - \frac{r_g}{b}\right) \qquad (14)$$

Поскольку интеграл не берется явно, разложим подынтегральное выражение в ряд по малому параметру r_g и проинтегрируем.

$$\frac{1}{\frac{b^3-r^3}{b^3-a^3} r_g - r_g + r} \approx \frac{1}{r} + \frac{(r^3 - a^3)}{b^3 - a^3} \frac{r_g}{r^2}$$

$$\nu(a) \approx \frac{(b-a)r_g}{2a^2} + \ln\left(1 - \frac{r_g}{a}\right) \qquad (15)$$ *или*

$$A = g_{00} = e^{\nu(a)} \approx e^{\frac{-hr_g}{2a^2}} \left(1 - \frac{r_g}{a}\right) \qquad (16)$$

Найдем также массу «чистого вещества» по формуле из ЛЛ-2:

$$m = \int_a^b 4\pi\varepsilon e^{\lambda/2}\, r^2 dr \qquad (17)$$

Подставляем сюда плотность $\mathcal{E}$ из (9) и выражение радиальной метрической компоненты из (11b).

$$m = 3M \int_a^b \frac{r^{\frac{5}{2}} dr}{(b^3 - a^3)\sqrt{\frac{(b^3 - r^3) r_g}{b^3 - a^3} - r_g + r}} \qquad (18)$$

Или приближенно $r_g << b$ для тонкой оболочки.

$$m \approx M\left(1 + \frac{r_g}{4b}\right) \qquad (19)$$

Скалярная кривизна внутри вещества для тонкой оболочки:

$$R = -\frac{3r_g}{2b^2(b-a)} \qquad (20)$$